

Matej Kolar

SKUPAJ
SKOZI

Analizo I



Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta



SKUPAJ SKOZI ANALIZO I

Matej Kolar

Ljubljana, 2003

mag. Matej Kolar, asist.

Skupaj skozi Analizo I

Strokovni pregled: dr. Matija Cencelj, doc.

dr. Marjan Jerman, asist.

dr. Marko Razpet, izr. prof.

Za izdajatelja: dekan dr. Pavel Zgaga, red. prof.

Za založniško komisijo: dr. Janez Krek, doc.

Oblikovanje, računalniški prelom: avtor s sistemom L^AT_EX

Izdala: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Tisk: Littera picta d.o.o. Ljubljana

Naklada: 300 izvodov

Domača stran: <http://hrast.pef.uni-lj.si/~matej/skupaj>

© avtor, Ljubljana 2003

Ključne besede: matematika, elementarna analiza, množica, logika, relacija, funkcija, število, metrika, zaporedje, vrsta, limita, zveznost, odvod, integral, naloga, problem, rešitev

Keywords: mathematics, elementary analysis, calculus, set, logic, relation, function, number, metric, sequence, series, limit, continuity, derivative, integral, exercise, problem, solution

517



Po ZAKONU O DAVKU NA DODANO VREDNOST (URADNI LIST RS št. 89/98, 7. točka, 25. člen) SODI KNJIGA MED PROIZVODE, ZA KATERE SE PLAČUJE 8% DAVEK OD PROMETA PROIZVODOV.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji

Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(075.8)(076.2)

KOLAR, Matej

Skupaj skozi Analizo I / Matej Kolar. – Ljubljana : Pedagoška fakulteta, 2003

ISBN 86-7735-067-5

126239744

BREZ PISNEGA DOVOLJENJA JE PREPOVEDANO REPRODUCIRANJE, DISTRIBUCIJA, JAVNA PRIOBČITEV, PREDELAVA ALI DRUGA UPORABA TEGA AVTORSKEGA DELA IN NJEGOVIH DELOV V KAKRŠNEM KOLI OBSEGU ALI POSTOPKU, SKUPAJ Z FOTOKOPIRANJEM, TISKANJEM ALI SHRANITVIJO V ELEKTRONSKI OBLIKI, V OKVIRU DOLOČIL ZAKONA O AVTORSKI IN SORODNIH PRAVICAH.

108/153

Mojim

PREDGOVOR

Osnova pričujoče knjige so naloge, s katerimi smo se skupaj s študenti spopadali pri pouku Analize I, ki je umeščena v kurikulum prvega letnika smeri matematike z vezavami na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani. Skozi leta sem spoznal, da študentom ne manjka nalog – na voljo imajo precejšnje število domačih in tujih knjig s tovrstno vsebino – temveč jim manjka celovit pristop k snovi – naloge s celovito rešitvijo in morebitno dodatno razlago in podvprašanja. Zlasti pri nalogah, ki niso računskega tipa, se ta problem jasno izpostavi: učeči se študent je pogosto v dvomih, ali sta dokaz ali utemeljitev, ki ju je napravil, pravilna; podobne težave se lahko pojavijo tudi pri zahtevnejših računskih nalogah, kljub pravilnemu končnemu rezultatu.

Zato sem v prvem delu zbral teorijo (definicije in trditve brez dokazov), ki ji sledijo pripadajoče naloge, v drugem delu pa bralec najde vsako nalogo rešeno v celoti. Toda pozor – knjigo je potrebno uporabljati previdno, zlasti njen drugi del: Težjim problemom je včasih treba posvetiti več časa, jih prespati ali se posvetovati s kolegi – vsi poznamo antično misel, da do znanja matematike ni kraljevske poti. Šele ko reševalec zaide v slepo ulico, naj v drugem delu knjige poišče manjkajočo zamisel (in oborožen z njo nadaljuje reševanje) ali pa celo rešitev. Tudi v primeru, ko bralec najde lastno rešitev (ali vsaj misli, da jo je), naj jo primerja s tisto v drugem delu knjige: pri tem morda spozna novo pot do rešitve ali celo odkrije vrzel v lastni (morda pa tudi v objavljeni).

Knjiga ne želi biti vseobsegajoča: v prvi vrsti naj jo študent uporabi kot dopolnilo k zapiskom s predavanj in vaj. Če se bo uporabnik z njeno pomočjo dokopal do novih matematičnih spoznanj, je njen namen dosežen.

Zahvaliti se želim recenzentom M. Cenclju, M. Jermanu in M. Razpetu za številne koristne pripombe. Vsaka morebitna napaka gre izključno na moj račun; če jo najdete, bom vesel vašega obvestila na domačo stran na naslovu <http://hrast.pef.uni-lj.si/~matej/skupaj>. Hvala tudi stvariteljema $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ a in $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ a, D. E. Knuthu in L. Lamportu, ki sta avtorjem omogočila popolno kontrolo nad stavljenjem matematičnih besedil.

Avtor

UVOD

Tečaj Analize I skupaj z Algebro I tvori jedro uvoda v visokošolsko matematiko. Snov Analize I je elementarna matematična analiza: realna zaporedja in realne funkcije realne spremenljivke ter njihove lastnosti. Beseda *elementarna* napoveduje osnovne matematične koncepte te veje matematike, ki jih spoznamo v omejeni širini in globini; beseda *analiza* nakazuje znanstveno metodo in način njihove obravnave in raziskovanja. Besedi *analiza* bi še lahko dodali *sintezo*, saj se ukvarja tudi s *spajanjem* tako analiziranih pojmov in spoznanj; tovrstni pristop k raziskovanju si ne lasti samo matematika – spomnimo se naprimer še na druge znanosti in pripadajoče analize: kemijsko, stavčno, ...

Ne pozabimo, da (matematična) algebra uporablja prav iste znanstvene metode; imeni matematične analize in algebre kot vej matematike sta se izoblikovali skozi čas in nikakor nista izključujoči – ravno nasprotno: se prepletata in sodelujeta (eden od lepših zgledov je *osnovni izrek algebre*).

Funkcija je pojem, s katerim je moč opisovati nekatere pojave v naravi in družbi, hkrati pa je zanimiv abstraktni objekt, na katerem slonijo drugi, kompleksnejši. Zaradi omejitve širine obravnave nas tukaj zanima predvsem realna funkcija realne spremenljivke in njene lastnosti: zveznost, odvedljivost in integrabilnost. Tovrstne funkcije so dobra osnova in zgled, ko pozneje gradimo višja nadstropja matematične zgradbe.

Vendar tudi funkcije rastejo iz splošnejšega okolja – iz relacij, te pa iz množic. Pri slednjih se ustavimo in potegnemo črto – koncept množice vzamemo za temeljni pojem in ga ne definiramo. Če poleg tega privzamemo obstoj prazne množice, je moč zgraditi naravna števila, iz njih cela, zatem racionalna in realna. Tukaj se bomo osredotočili na slednja in na funkcije, ki slikajo med njimi. Če na številskih množicah na primeren način vpeljemo operacije, dobimo pomembne zglede algebrajskih struktur.

V enem od poglavij se dotaknemo metričnih prostorov, kjer lahko bralec za sluti, katere so bistvene lastnosti polja realnih števil iz katerih raste teorija o realnih funkcijah realne spremenljivke. S tem napravimo korak v smer nadaljnje abstrakcije obravnavanih pojmov.

Dotaknili smo se že vprašanj, katere matematične pojme in na kak način obravnava elementarna matematična analiza; preostane nam še vprašanje, zakaj ravno te. Odgovor se ponuja v definicijah in trditvah, ki opredeljujejo in povezujejo obravnavano snov. Bogastvo teorije (pa tudi uporabe), ki raste iz postavljenih definicij posameznih pojmov, potrjuje njihovo smiselnost. Zato je to vprašanje najzahtevnejše: ko se ozremo na prehojeno pot, bolje vidimo njen smisel in lepoto.

KAZALO

PREDGOVOR · VII

UVOD · IX

KAZALO · XI

TEORIJA IN NALOGE

LOGIKA IN MNOŽICE · 3

Matematična logika, izjavni račun – teorija · 3

Predikatni račun – teorija · 5

Teorija množic – teorija · 6

Matematična logika, izjavni račun – naloge · 9

Predikatni račun, teorija množic – naloge · 10

RELACIJE · 15

Osnove – teorija · 15

Osnove – naloge · 16

FUNKCIJE · 21

Osnove – teorija · 21

Elementarne funkcije – teorija · 25

Osnove – naloge · 29

Elementarne funkcije – naloge · 30

ŠTEVILSKE MNOŽICE IN STRUKTURE · 35

Naravna števila, matematična indukcija – teorija · 35

Cela števila – teorija · 37

Racionalna števila – teorija · 37

<i>Realna števila – teorija</i>	· 37
<i>Kompleksna števila – teorija</i>	· 39
<i>Koreni enote – teorija</i>	· 41
<i>Ničle kompleksnega polinoma – teorija</i>	· 41
<i>Naravna števila, matematična indukcija – naloge</i>	· 42
<i>Racionalna števila, realna števila – naloge</i>	· 43
<i>Kompleksna števila – naloge</i>	· 45
<i>Ničle kompleksnega polinoma, koreni enote – naloge</i>	· 46

METRIČNI PROSTORI · 49

<i>Metrika – teorija</i>	· 49
<i>Odperte množice, zaprte množice – teorija</i>	· 50
<i>Metrika – naloge</i>	· 52
<i>Odperte množice, zaprte množice – naloge</i>	· 54

ZAPOREDJA IN VRSTE · 55

<i>Zaporedje – teorija</i>	· 55
<i>Vrsta – teorija</i>	· 60
<i>Zaporedje – naloge</i>	· 62
<i>Vrsta – naloge</i>	· 66

LIMITA FUNKCIJE, ZVEZNOST FUNKCIJE · 69

<i>Limita funkcije – teorija</i>	· 69
<i>Zveznost funkcije – teorija</i>	· 70
<i>Limita funkcije – naloge</i>	· 73
<i>Zveznost funkcije – naloge</i>	· 76

ODVOD FUNKCIJE · 81

<i>Osnove – teorija</i>	· 81
<i>Geometrijski vidik odvoda – teorija</i>	· 85
<i>Taylorjev razvoj funkcije – teorija</i>	· 86
<i>Esktremi funkcije – teorija</i>	· 87
<i>L'Hôpitalovo pravilo – teorija</i>	· 89
<i>Osnove – naloge</i>	· 89
<i>Geometrijski vidik odvoda – naloge</i>	· 91
<i>Taylorjev razvoj funkcije – naloge</i>	· 93
<i>Ekstremi funkcije – naloge</i>	· 95
<i>L'Hôpitalovo pravilo – naloge</i>	· 96

GRAF FUNKCIJE · 99

INTEGRAL FUNKCIJE · 105

<i>Nedoločeni integral – teorija</i>	· 105
<i>Določeni integral – teorija</i>	· 108
<i>Nepravi integral – teorija</i>	· 112
<i>Uporaba določenega integrala – teorija</i>	· 114
<i>Nedoločeni integral – naloge</i>	· 117
<i>Določeni integral – naloge</i>	· 118
<i>Nepravi integral – naloge</i>	· 119
<i>Uporaba določenega integrala – naloge</i>	· 119

REŠITVE

LOGIKA IN MNOŽICE · 123

<i>Matematična logika, izjavni račun – rešitve</i>	· 123
<i>Predikatni račun, teorija množic – rešitve</i>	· 126

RELACIJE · 143

<i>Osnove – rešitve</i>	· 143
-------------------------	-------

FUNKCIJE · 157

<i>Osnove – rešitve</i>	· 157
<i>Elementarne funkcije – rešitve</i>	· 158

ŠTEVILSKÉ MNOŽICE IN STRUKTURE · 177

<i>Naravna števila, matematična indukcija – rešitve</i>	· 177
<i>Racionalna števila, realna števila – rešitve</i>	· 183
<i>Kompleksna števila – rešitve</i>	· 189
<i>Ničle kompleksnega polinoma, koreni enote – rešitve</i>	· 196

METRIČNI PROSTORI · 205

<i>Metrika – rešitve</i>	· 205
<i>Odperte množice, zaprte množice – rešitve</i>	· 215

ZAPOREDJA IN VRSTE · 223

<i>Zaporedje – rešitve</i>	· 223
<i>Vrsta – rešitve</i>	· 247

LIMITA FUNKCIJE, ZVEZNOST FUNKCIJE · 253

<i>Limita funkcije – rešitve</i>	· 253
<i>Zveznost funkcije – rešitve</i>	· 263
ODVOD FUNKCIJE	· 273
<i>Osnove – rešitve</i>	· 273
<i>Geometrijski vidik odvoda – rešitve</i>	· 283
<i>Taylorjev razvoj funkcije – rešitve</i>	· 288
<i>Ekstremi funkcije – rešitve</i>	· 301
<i>L'Hôpitalovo pravilo – rešitve</i>	· 309
GRAF FUNKCIJE	· 315
INTEGRAL FUNKCIJE	· 341
<i>Nedoločeni integral – rešitve</i>	· 341
<i>Določeni integral – rešitve</i>	· 352
<i>Npravi integral – rešitve</i>	· 354
<i>Uporaba določenega integrala – rešitve</i>	· 357
STVARNO KAZALO	· 364
LITERATURA	· 373



Univerza
v Ljubljani

Pe
Fal



PEDAGOSKA FAKULTETA - KNJIŽNICA

51(075.8)
KOLAR, M.
Skupaj



0108153

COBISS c

UNIVERZA V LJUBLJANI



9 788677 350673