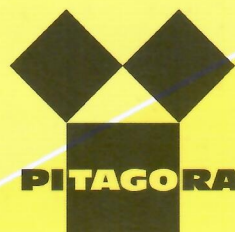


**Matej Kolar
Boris Zgrablić**

**Več kot nobena,
a manj kot tisoč in ena
rešena naloga iz**

LINEARNE ALGEBRE





UNIVERZA V LJUBLJANI
UNIVERSITY OF LJUBLJANA

Pedagoška fakulteta
Faculty of Education
1000 Ljubljana
Kardeljeva ploščad 16

Matej Kolar in Boris Zgrablić

Več kot nobena,
a manj kot tisoč in ena
rešena naloga iz linearne algebre

Ljubljana, 1996

Matej Kolar in Boris Zgrablić

VEČ KOT NOBENA, A MANJ KOT TISOČ IN ENA
REŠENA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

Strokovni pregled: dr. Gorazd Lešnjak, docent Univerze v Mariboru
dr. Peter Petek, redni profesor Univerze v Ljubljani

Za izdajatelja: dekan prof. dr. Miran Čuk

Za založniško komisijo: prof. dr. Saša A. Glažar

Izdala Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Tisk: Planprint d. o. o, Ljubljana

Naklada: 250 izvodov, 1. izdaja

Računalniško stavila avtorja.

©1996 avtorja

Vse pravice pridržane. Vsako reproduciranje, kopiranje ali preslikavanje celote ali posameznih delov v katerikoli tehniki je mogoče le s pisnim dovoljenjem avtorjev.

Math. Subj. Class. (1991): 15-01-vaje, 15A03, 15A04, 15A06, 15A09, 15A15, 15A18, 15A21, 15A63

Ključne besede: matematika, linearna algebra, vektorski prostor, linearna preslikava, endomorfizem, matrika, determinanta, lastna vrednost, lastni vektor, skalarni produkt, evklidski prostor, unitarni prostor, kanonska oblika, bilinearna preslikava, kvadratna forma, naloga, namig, rešitev, problem

Keywords: mathematics, linear algebra, vector space, linear mapping, endomorphism, matrix, determinant, eigenvalue, eigenvector, scalar product, euclidean space, unitary space, canonical form, bilinear mapping, quadratic form, exercise, hint, solution, problem

Po mnenju MŠŠ št.415-167/96 z dne 19. 9. 1996 šteje knjiga med proizvode 13. točke tarifne številke 3 Zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

CIP — Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica

512.64(075.8)(076.1)

KOLAR, Matej

Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz
linearne algebre / Matej Kolar in Boris Zgrablić. — Ljubljana:
Pedagoška fakulteta, 1996

ISBN 86-7735-024-1

1. Zgrablić, Boris
62120704



512.64(075.8)
84657

Predgovor

Jedro te zbirke tvori približno dvesto nalog s kolokvijev in pisnih izpitov pri predmetu Algebra I na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani in pri predmetu Linearna algebra na Tehniški fakulteti Univerze v Mariboru. Sestavila sva jih v obdobju, ko sva vodila vaje iz tega predmeta (B. Z. od leta 1990 z enoletnim premorom, M. K. od leta 1993). Jeseni leta 1995 sva se odločila zbrane naloge nekoliko urediti in izdati kot gradivo študentom za urjenje.

V želji napisati knjižico, po kateri bi rad posegal tudi, kdor sprva ne zmore (ali meni, da ne zmore) vseh korakov pri reševanju zastavljenih nalog in potrebuje več kot končne rezultate in nekaj najnujnejših nasvetov ali namigov, sva se lotila pisanja rešitev s spremljajočimi razlagami in utemeljitvami. Mnoge naloge sva rešila na več načinov (nikakor nisva izčrpala vseh!) in s tem skušala po eni strani poudariti legitimnost različnih pogledov na isto snov in omogočiti primerjavo le teh, po drugi pa opozoriti na vezi med, morebiti, navidez ločenimi področji in prijemi. Pri tem so sproti nastajale nove, ali raje dodatne naloge, namenjene krepitvi posameznih konceptov in zložnejšemu prehodu med različno zahtevnimi problemi.

Rešitve sva pisala v drugi osebi ednine, bralka in bralec naj nama ne zamerita tega pokrovitelskega tikanja, katerega edini namen je spodbuditi ju k sodelovanju. Seveda jima priporočava, da pri samostojnem reševanju uporabljata stilno manj zaznamovano prvo osebo množine. Prebereta naj tudi opombe k rešitvam: te lahko vsebujejo dodatne, v tej knjižici nerešene, a rešljive naloge (variacije na temo, posplošitve...), opozarjajo na uporabljene izreke in zvijače, kažejo na morebitne krajsnice in pasti ali kratko poudarjajo, kar si je vredno zapomniti. Večino rešitev sva opremila tudi s kazalom sorodnih nalog. Manj pozornosti zasluži stopnja zahtevnosti naloge – označila sva jo z enim, dvema ali tremi diamanti:

- ◇ osnovna: za reševanje zadošča razumevanje temeljnih pojmov,
- ◇◇ višja: koristna sta računska spretnost in smisel za pobudo,
- ◇◇◇ visoka: potrebna sta globlji uvid v snov in raziskovalna vnema.

Izbrana razvrstitev je dvakrat relativna, saj velja znotraj posameznega razdelka in je rezultat najine presoje.

Področja, ki sva jih zajela, so stalnica v večini uvodov v linearno algebro. Definicij in izrekov nisva posebej zapisala, vtakane so v nalogah in rešitvah. Omeniva le

- *usmerjeno daljico, krajevni vektor, vektor in urejeno trojico realnih števil*, ki so brez dvoma različne reči, a jih vendarle v razdelku Geometrija kratko poimenujeva *vektor*. Take vektorje opremiva (kot je običaj) s puščico, naprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \overline{AB}, \dots$. Prav tako dodava puščico vektorjem v \mathbb{R}^3 , kjer želiva poudariti geometrijsko vsebino. In še: namesto $|\vec{a}|^2$ pogosto piševa krajše \vec{a}^2 .
- problematiko definicije pojmov „linearno odvisna množica“ in „linearna kombinacija“, kar s primerom: množica $A := \{a, a\}$ je za neničeln vektor a prav gotovo linearno neodvisna (saj je $A = \{a\}$), čeprav velja $1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$. Zdi se, da ni množica tista struktura, ki jo potrebujemo pri definiciji linearne odvisnosti, temveč „množica s ponavljanjem“ – *mnogovka*. (Struktura zaporedja je sicer več kot primerna, toda urejenost zakriva bistvo

linearne odvisnosti.) Več o linearni kombinaciji pa v nalogi 87. Kljub omenjenim pomislekom nisva zapisala nove definicije, raje sva se z obširnejšo razlago previdno izognila preveč formalističnemu pristopu.

- polinome, ki jih potihem obravnavava na dva načina: večinoma kot algebrske objekte (skoraj povsod ničelna zaporedja skalarjev s primernimi operacijami), ponekod pa tudi kot preslikave (slednje je smiselno za polinome nad neskončnim poljem). Polinomom nisva posvetila posebnega razdelka, saj njihova temeljita algebrska vpeljava sega v teorijo kolarjev.
- prirejanje matrice linearni preslikavi, ki je eden od pomembnejših prijemov v linearni algebri. V ta namen je potrebno urediti bazi, glede na kateri prirejamo matriko. Čeprav urejeno bazo zapiševa na običajen način, kot množico in ne kot zaporedje, skušava dosledno poudarjati naravo tega koncepta s pisanjem *urejena baza*. Za matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}: U \rightarrow V$ glede na urejeni bazi Ω prostora U ter Π prostora V , uporabljava Langovo oznako $M_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{A})$. Podobno označujeva stolpec, ki pripada vektorju $u \in U$ glede na urejeno bazo Ω : $X_{\Omega}(u)$. Meniva, da je ta zapis strnjen, nazoren in berljiv.

Zahvala gre vsem nosilcem predmetov Algebra I in Linearna algebra, pri katerih sva doslej vodila vaje – doc. dr. Gorazdu Lešnjaku, prof. dr. Draganu Marušiču, prof. dr. Petru Petku, prof. dr. Dušanu Repovšu in prof. dr. Antonu Suhadolcu – recenzentoma za skrben pregled rokopisa in številne izboljšave, prof. dr. Marku Razpetu za nasvete in pomoč pri računalniškem stavljenju, asist. Marjanu Jermanu in asist. mag. Aleksandru Malniču za koristne pripombe ter Pedagoški fakulteti za končno izvedbo.

S posebnim zadovoljstvom se zahvaljujema še vsem, ki so naju podprli pri izpeljavi tega projekta.

V Ljubljani, 23. septembra 1996

Matej Kolar in Boris Zgrablić

Kazalo

Nekaj oznak	6	
Geometrija	7	81
Vektorski prostori	12	110
Linearne preslikave	19	139
Matrike in sistemi linearnih enačb	24	160
Vektorji in stolpci ter linearne preslikave in matrike	33	187
Determinante	41	214
Lastne vrednosti in lastni vektorji	48	231
Evklidski in unitarni prostori	55	256
Linearni funkcionali	59	271
Posebni endomorfizmi	62	282
Jordanova teorija	69	316
Bilinearne forme	75	339
Pot do jordanke matrike endomorfizma		347
Preglednica posebnih endomorfizmov		348
Izbor spremljajoče literature		349



PEDAGOŠKA FAKULTETA - KNJIŽNICA

51(075.8)
KOLAR, M.
Več



0084657

COBISS ◻

UNIVERZA V LJUBLJANI

Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani
Oddelek za matematiko in računalništvo